Herleitung der Formel für die Krümmung von Funktionsgraphen mit Hilfe der Beispiele $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^4$

Jens Weitendorf

Kurzfassung des Inhalts:
In dem Artikel wird in einer kurzen Einheit dargestellt, wie man über einen experimentellen Ansatz zur Bestimmung von Krümmungen von Funktionsgraphen an ausgewählten Stellen gelangen kann. Dies geschieht exemplarisch für die beiden genannten Funktionen im Koordinatenursprung. Aus dem experimentellen Ansatz ergibt sich die Möglichkeit, die allgemeine Formel für die Krümmung herzuleiten.

Klassenstufe(n):
Sekundarstufe II

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler ...

- lernen, dass man über einen experimentellen Zugang zu Begründungen mathematischer Sachverhalte gelangen kann;
- erfahren, dass ein CAS verständnisfördernd ist, da man den Rechenaufwand minimieren und leicht die Darstellungsebene wechseln kann.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Keine

Zeitbedarf:
1 - 2 Doppelstunden

Sonstige Materialien:
Keine

Einführung

Für Trassierungsprobleme ist in der Regel die Krümmung einer Kurve von Bedeutung, da damit eine maximale Geschwindigkeit verbunden ist, mit der die Kurve von einem Auto bzw. einem Zug durchfahren werden kann. Die Krümmung ist definiert als Grenzwert des Verhältnisses des Winkels $\Delta\alpha$ zwischen den positiven Richtungen der Tangenten in den Punkten P und P' und der Bogenlänge $\Delta s = \left|PP'\right|$ für $P \to P'$:

(1) $\mathrm{K} = \lim\limits_{P \to P'} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$. Für $y = f(x)$ erhält man: (2) $\mathrm{K} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

Der Radius für den Krümmungskreis ergibt sich zu $R = \frac{1}{K}$. Aus dem Obigen geht hervor, dass man zunächst die Formel für die Bogenlänge, die im Nenner des Ausdrucks steht, benötigt. Dies erklärt aber noch nicht die 2. Ableitung im Zähler. Insgesamt wird die Komplexität deutlich.

Die Krümmung des Graphen von $f(x) = x^2$ in $(0/0)$

Beschränkt man sich zunächst auf ein Beispiel, so lässt sich mit Rechnerunterstützung vieles vereinfachen und man kann – zunächst – auf der graphischen Ebene arbeiten. Ich diskutiere im Folgenden die Bestimmung des Krümmungsradius für die Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt (0/0).
Im Geometriebereich des ClassPad wird zunächst eine Normalparabel gezeichnet. Nun geht es darum, an die Parabel einen Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse anzupassen. Dabei ist der Kreis so zu konstruieren, dass der Mittelpunkt auf der y-Achse und ein Randpunkt im Koordinatenursprung liegt. Der Mittelpunkt des Kreises ist so zu verschieben, dass der gesuchte Kreis und die Parabel nur diesen einen Punkt, den Koordinatenursprung gemeinsam haben (Abb. 1).

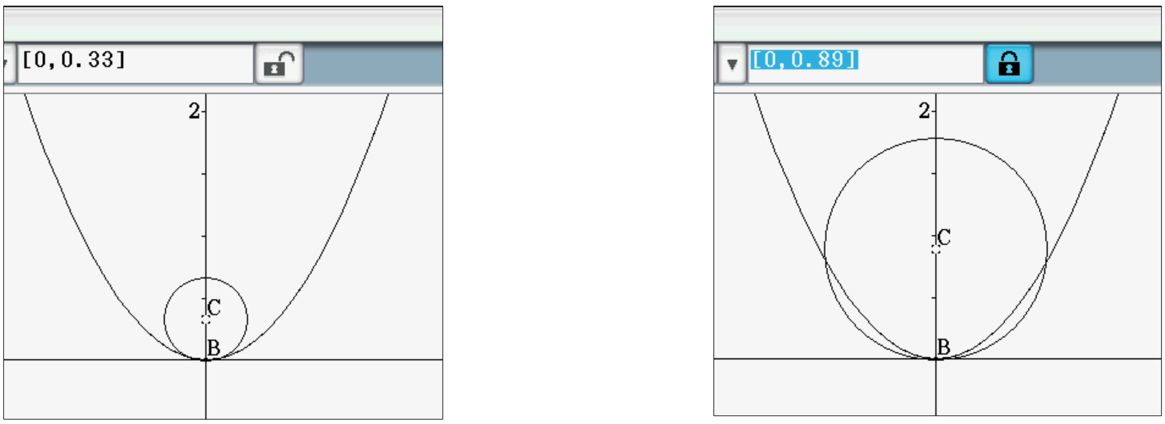

Abb. 1 Anpassung eines Kreises an die Normalparabel im Punkt (0/0)

Der Punkt C (Mittelpunkt des Kreises (s. Abb. 1)) muss also zum einen so verschoben werden, dass Kreis und Parabel nur den einen Punkt B gemeinsam haben, zum anderen müssen die beiden Kurven im Ursprung in ihren Krümmungen zunächst in anschaulicher Weise übereinstimmen, damit der Kreis sich optimal an die Parabel anschmiegt.

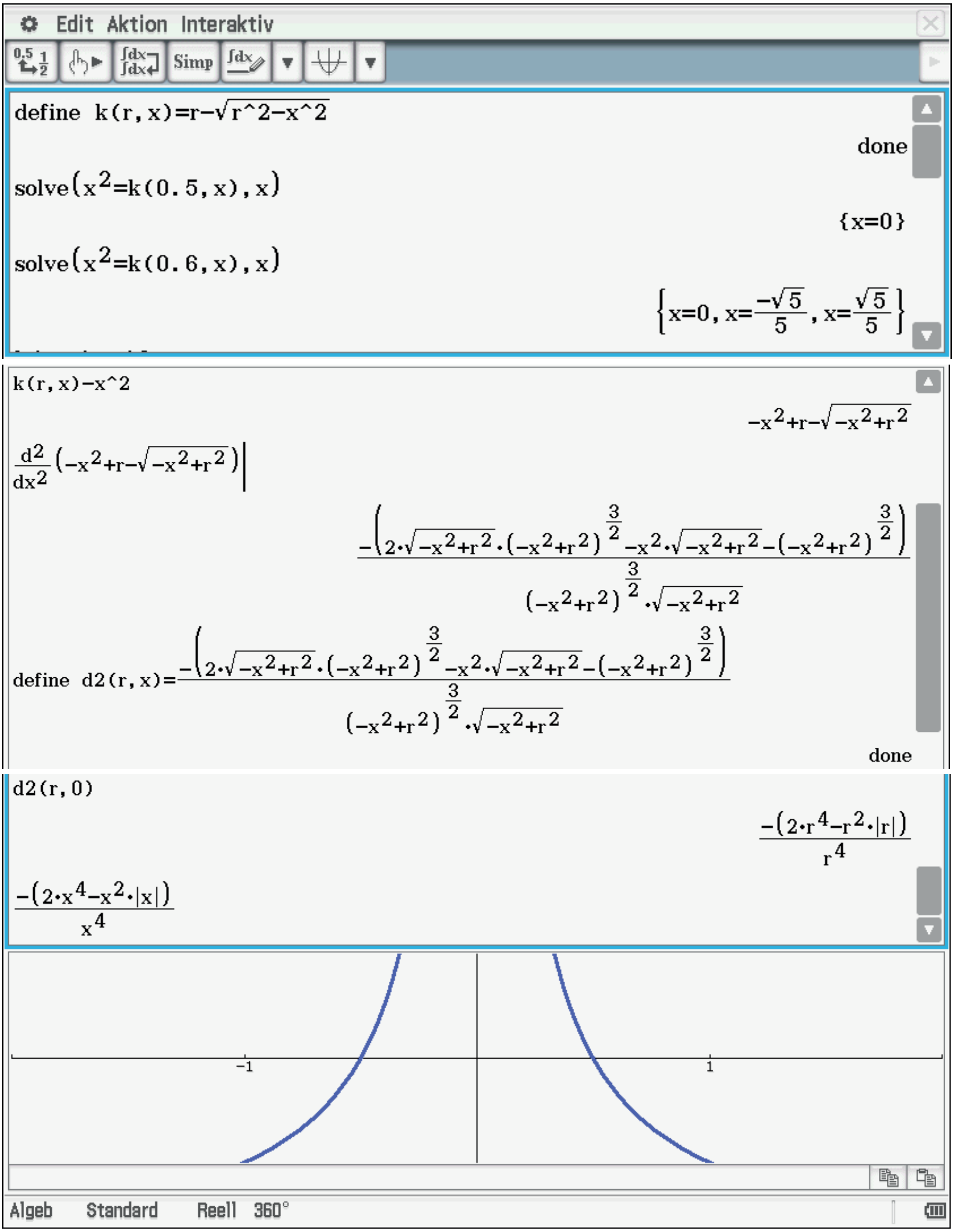

Abb. 2 Berechnung des Krümmungskreises und Graph der zweiten Ableitung der Differenzfunktion von Kreis und Parabel

Zunächst wird eine Funktion definiert, die den unteren Halbkreis beschreibt. In den nächsten Zeilen wird gezeigt, dass es für $r = 0{,}5$ genau eine und für $r = 0{,}6$ drei Schnittstellen zwischen Kreis und Parabel gibt. Im Folgenden wird die Differenzfunktion zwischen unterer Kreishälfte und Parabel definiert. Damit diese Funktion nur genau eine Nullstelle hat, muss die 2. Ableitung an der Stelle $x = 0$ einen positiven Wert haben; die Differenzkurve hat dann eine Linkskrümmung. Deswegen wird die zweite Ableitung dieser Differenzfunktion gebildet und der Wert dieser zweiten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ($d2(r, 0)$) bestimmt. Um den Graphen dieser Funktion darzustellen, muss die Variable r durch die Variable x ersetzt werden (Abb. 2). Die Abbildung 2 zeigt die Abhängigkeit des Krümmungsverhaltens im Koordinatenursprung vom Radius des Kreises; das heißt die Funktion $d2(r, 0)$.
Aus Abbildung 2 ist zu erkennen, dass $r = 0{,}5$ der gesuchte Wert für den Radius ist, da sich genau für diesen Wert das Krümmungsverhalten in $x = 0$ ändert.
Der oben beschriebene Weg zur Bestimmung des Krümmungsradius bietet Schülerinnen und Schülern vor allem durch die Unterstützung durch die dynamische Geometrie-Software die Möglichkeit, ein Verständnis für den Sachverhalt aufzubauen. Das CAS entlastet den Unterricht, da die formalen Umformungen, die in diesem Zusammenhang nicht zentral sind, nicht thematisiert werden müssen.

Die Krümmung des Graphen von $f(x) = x^4$ in $(0/0)$

Wir betrachten als nächstes den Graphen der Funktion $f(x) = x^4$ und interessieren uns für die Krümmung im Punkt (0/0).

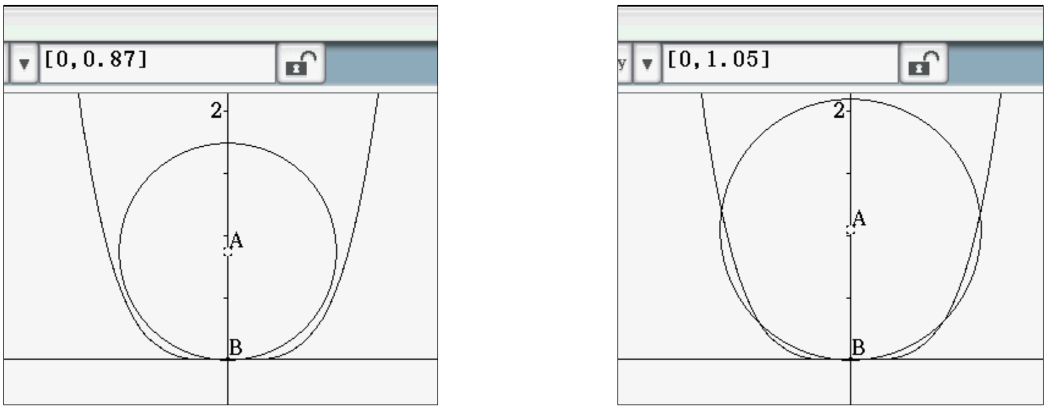

Abb. 3 Anpassung eines Kreises an den Graphen von $f(x) = x^4$ im Punkt (0/0)

Im Vergleich mit Abbildung 1 wird ein deutlicher Unterschied sichtbar. Für kleine Radien gibt es einen gemeinsamen Punkt; für größere in der Regel fünf gemeinsame Punkte; das heißt, es muss einen Radius geben, für den es genau drei gemeinsame Punkte gibt (vgl. Abbildung 4). Wie findet man den Radius des Kreises, wenn es nur einen gemeinsamen Punkt von Kreis und Parabel geben soll?

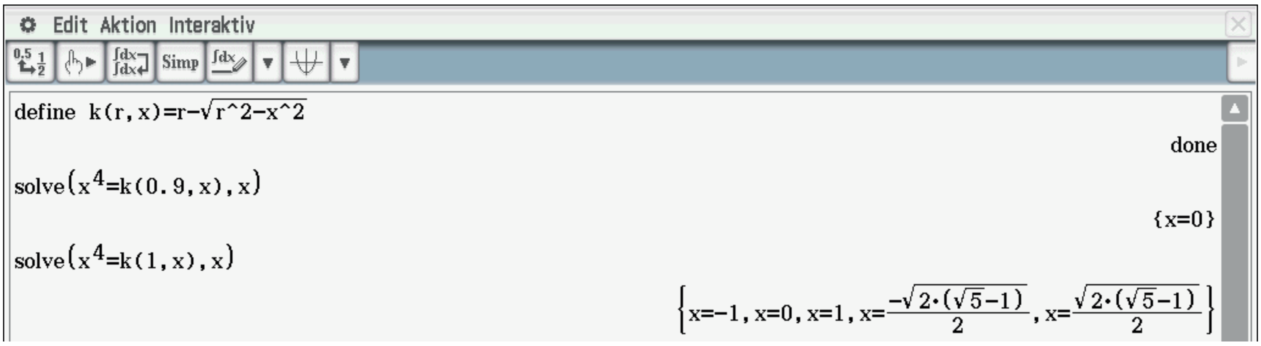

Abb. 4 Erste Annäherung für den Radius, für den es genau 3 Schnittstellen gibt

Man wählt zunächst größere Radien und erkennt aus der grafischen Darstellung (s. Abb. 5), dass es für große Radien 3 Schnittpunkte gibt und dass die beiden Kurven in der Nähe des Koordinatenursprungs nahezu identisch sind.

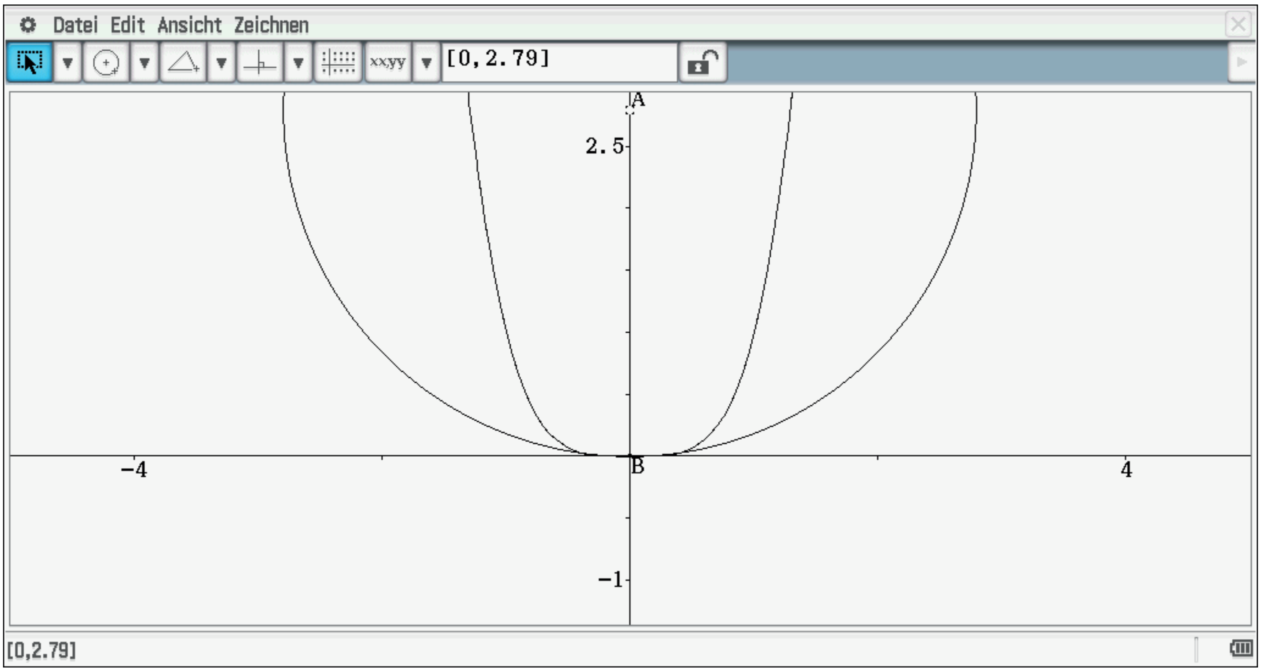

Abb. 5 Darstellung für „große“ Radien

Für eine genauere Betrachtung führen wir die entsprechenden Berechnungen für die Funktion $f(x) = x^4$ durch. Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis.

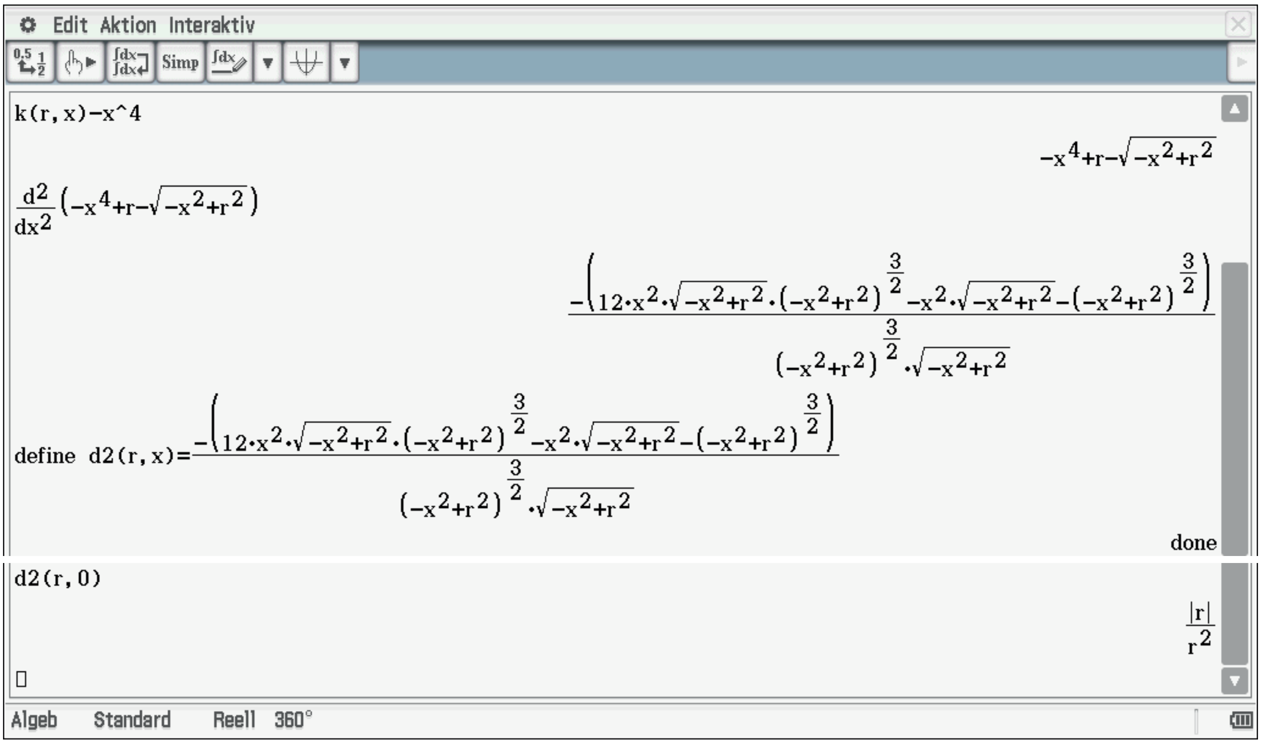

Abb. 6 Diskussion der Differenzfunktion für den Punkt (0/0)

Die 2. Ableitung der Differenzfunktion zeigt, dass es für den Fall $f(x) = x^4$ keine Nullstelle und damit auch keine Änderung des Krümmungsverhaltens gibt. Daraus folgt, dass es keinen Kreis mit einem endlichen Radius gibt, der im Koordinatenursprung die gleiche Krümmung wie der Graph von $f(x) = x^4$ besitzt; bzw. die Krümmung hat im Punkt (0/0) den Wert 0.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wie der Radius zu wählen ist, so dass es genau drei gemeinsame Punkte gibt. Dazu ist es erforderlich, dass in diesen Punkten sowohl die Funktionswerte als auch die ersten Ableitungen übereinstimmen. Zur Beantwortung ist ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen. Dies bietet somit auch die Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit des ClassPad II zu testen.

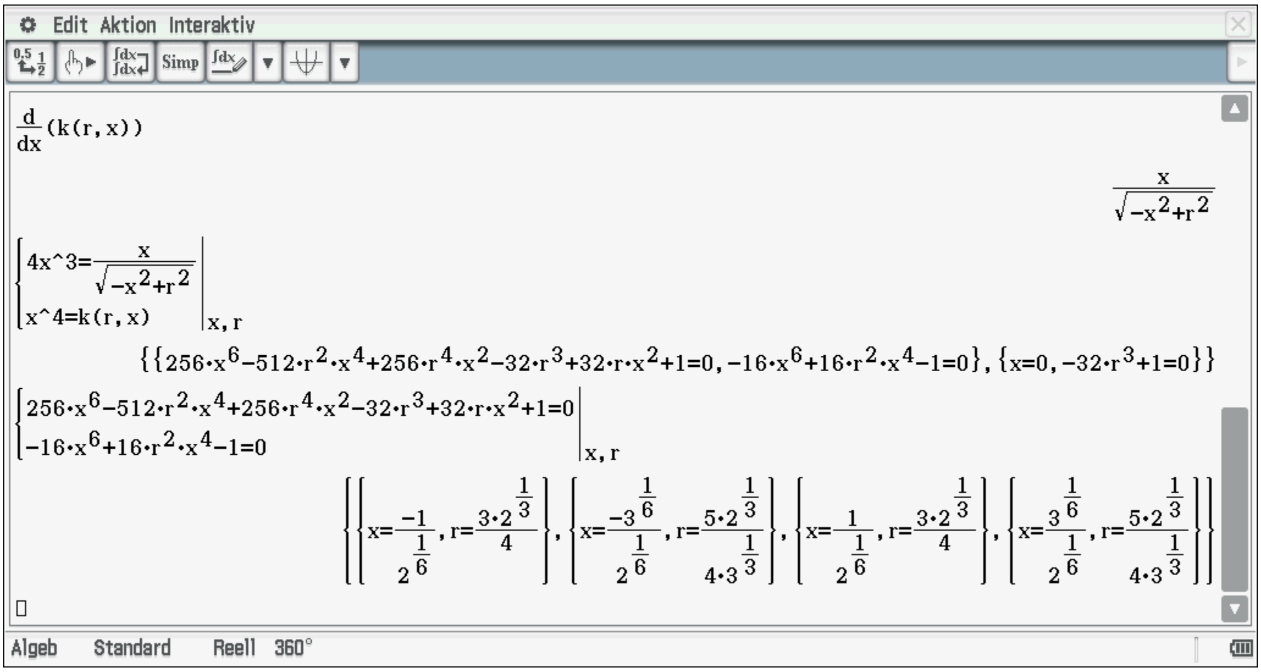

Abb. 7 Bestimmung der 3 gemeinsamen Stellen

Wie die Abbildung 7 zeigt, erhält man die Werte nicht in einem Schritt. Zur besseren Einschätzung sind die gerundeten Werte in Abbildung 8 wiedergegeben. Man erkennt, dass man die vermutete Lösung mit $0{,}9 < r < 1$ erhält. Aus der Abbildung 3 ergibt sich, dass die beiden anderen „Lösungen" (Abb. 8) als Lösung für das Problem nicht in Frage kommen. Zu bedenken ist, dass das zweite Gleichungssystem aus einem mit einer Wurzelgleichung hervorgegangen ist und es sich deswegen nicht um Äquivalenzumformungen handelt.

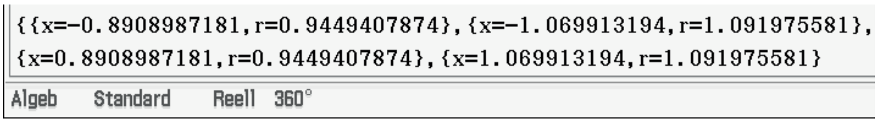

Abb. 8 Übertragung der exakten Werte in Dezimalzahlen

Auf der anderen Seite vermisst man die triviale Lösung $(0/0)$. Der sich für r ergebende Wert, wenn $x = 0$ ist (s. Abb. 7 zweites Lösungspaar für das erste System), kann nicht stimmen.

Herleitung der allgemeinen Formel

Aus den beiden Beispielen lassen sich allgemeine Gleichungen zur Bestimmung des Kreises herleiten. Gesucht sei der Kreis, der sich dem Funktionsgraphen einer gegebenen Funktion f an der Stelle x_0 optimal anschmiegt. Es ist offensichtlich, dass der Punkt $(x_0/f(x_0))$ sowohl ein Punkt des Funktionsgraphen als auch des gesuchten Kreises sein muss. Das heißt:

$$(x_0 - x_M)^2 + (f(x_0) - y_M)^2 = r^2.$$

Wegen der optimalen Anpassung müssen auch die Steigungen des Kreises und des Funktionsgraphen gleich sein. Für die Bestimmung des Radius im ersten Beispiel haben wir die Nullstelle der 2. Ableitung der Differenzfunktion bestimmt; das heißt auch die 2. Ableitungen müssen übereinstimmen. Zur Vereinfachung sei der Mittelpunkt des Kreises $M(m/n)$.

Edit Aktion Interaktiv

(x−m)^2+(f(x)−n)^2=r^2

$$(f(x)-n)^2+(x-m)^2=r^2$$

$$\frac{d}{dx}\left((x-m)^2+(f(x)-n)^2=r^2\right)$$

$$2\cdot\frac{d}{dx}(f(x))\cdot f(x)-2\cdot n\cdot\frac{d}{dx}(f(x))+2\cdot x-2\cdot m=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\cdot\frac{d}{dx}(f(x))\cdot f(x)-2\cdot n\cdot\frac{d}{dx}(f(x))+2\cdot x-2\cdot m=0\right)$$

$$2\cdot\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2+2\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\cdot f(x)-2\cdot n\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f(x))+2=0$$

Abb. 9 Bestimmung der Ableitungen

Die letzte Gleichung lässt sich nach n auflösen:

$$\text{solve}\left(2\cdot\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2+2\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\cdot f(x)-2\cdot n\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f(x))+2=0,\ n\right)$$

$$\left\{n=\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}+f(x)+\frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right\}$$

Abb. 10 Bestimmung von y_M

Die weiteren Umformungen lassen sich alle mit dem ClassPad durchführen. Es wird der Wert für n in die zweite Gleichung eingesetzt und diese dann nach m aufgelöst. Die so erhaltenen Werte für den Kreismittelpunkt setzen wir dann in die Ausgangsgleichung ein, um einen Wert für den Radius zu erhalten. Zu beachten ist, dass durch das Auflösen nach der Variablen n noch nicht der entsprechende Wert zugewiesen worden ist. Dies muss mit Hilfe des *Zuordnungspfeils* noch extra geschehen. Die folgenden Abbildungen zeigen die entsprechenden Rechnungen.

Edit Aktion Interaktiv

$$\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}+f(x)+\frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\Rightarrow n$$

$$\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}+f(x)+\frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}$$

$$2\cdot\frac{d}{dx}(f(x))\cdot f(x)-2\cdot n\cdot\frac{d}{dx}(f(x))+2\cdot x-2\cdot m=0$$

$$-2\cdot\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}+f(x)+\frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))+2\cdot\frac{d}{dx}(f(x))\cdot f(x)+2\cdot x-2\cdot m=0$$

$$\mathrm{solve}\left(-2\cdot\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}+f(x)+\frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))+2\cdot\frac{d}{dx}(f(x))\cdot f(x)+2\cdot x-2\cdot m=0,\ m\right)$$

$$\left\{m=\frac{-\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3-x\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f(x))+\frac{d}{dx}(f(x))\right)}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right\}$$

$$\frac{-\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3-x\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f(x))+\frac{d}{dx}(f(x))\right)}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\Rightarrow m$$

$$\frac{-\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3-x\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f(x))+\frac{d}{dx}(f(x))\right)}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}$$

(x−m)^2+(f(x)−n)^2=r^2

$$\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3-x\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f(x))+\frac{d}{dx}(f(x))}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}+x\right)^2+\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}+\frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right)^2=r^2$$

$$\mathrm{simplify}\left(\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3-x\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f(x))+\frac{d}{dx}(f(x))}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}+x\right)^2+\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}+\frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right)^2=r^2\right)$$

$$\frac{\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2+1\right)^3}{\left(\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\right)^2}=r^2$$

$$\mathrm{solve}\left(\frac{\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2+1\right)^3}{\left(\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\right)^2}=r^2,\ r\right)$$

$$\left\{r=\frac{-\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))},\ r=\frac{\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right\}$$

Algeb Standard Reell 360°

Abb. 11 Bestimmung des Radius

Von den beiden Lösungen aus Abbildung 11 interessiert uns natürlich nur die zweite. Man erkennt den üblichen Ausdruck. Anzumerken ist, dass wir $f''(x) \neq 0$ und die zweimalige stetige Differenzierbarkeit für die Funktion f vorausgesetzt haben.

Literatur

Büchter A., Henn H.-W.(2013): Kurve, Kreis und Krümmung – ein Beitrag zur Vertiefung des Ableitungsbegriffs in: Allmendinger H., Lengnink K., Vohns A. ,Wickel G. Hrsg: Mathematik verständlich unterrichten, Springer Spektrum, Wiesbaden